

基于贝叶斯估计的多分辨图像滤波方法

胡战虎

(南京大学数学系, 江苏南京 210093)

摘 要: 图像的小波系数具有很强的非高斯统计特性, 可以建立推广的拉普拉斯先验分布, 用贝叶斯估计对图像小波系数滤波来达到降噪目的. 由于正交小波的正交性质能够保证白噪声干扰图像的小波系数所包含的噪声是白色的, 基于正交小波变换的贝叶斯估计有较好的降噪性能.

关键词: 小波; 贝叶斯估计; 滤波

中图分类号: TN919.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 01-0066-03

Multiresolution Image Denoising via Bayesian Estimator

HU Zhan-hu

(Dept. of Mathematics, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu 210093, China)

Abstract: The wavelet subband coefficients of images have highly non-Gaussian statistics that may be modeled with generalized Laplacian distributions, and Bayesian estimation is used to suppress noise. Because the wavelet transform is orthonormal, noises in wavelet coefficients of images corrupted by additive white Gaussian noises are also Gaussian and white, and performance of denoising via Bayesian estimator based on orthogonal wavelet transform is excellent.

Key words: wavelet; bayesian estimation; filtering

1 引言

在图像处理中往往遇到去噪的问题. 传统的图像随机噪声降噪方法大致可以划分为两类: 一类是频率域方法, 另一类方法是空间域方法. 随着小波理论的出现许多学者提出了基于小波变换的滤波方法, 其中较具有代表性的是 Donoho 提出的门限方法^[1].

Mallat 的研究指出^[2], 图像的小波系数具有很强的非高斯统计特性, 其直方图可以用推广的拉普拉斯分布建模. 最近, 一些学者研究了基于贝叶斯估计噪声消除方法^[3~5], 取得了较好的效果, 如 Simoncelli 等提出可控波 (steerable wavelet) 的贝叶斯估计算法. 但可控波不具有正交性, 而且图像分解后较原图像数据量增大. 正交小波由于其正交性质, 使得受白噪声污染的图像的小波系数所包含的噪声依然是白的, 同时正交小波变换后不增加数据. 本文研究基于正交小波的贝叶斯估计图像滤波及性能.

2 贝叶斯估计及先验模型

假设图像 x 受到噪声 n 污染

$$y = x + n \quad (1)$$

n 是均值为 0, 方差为 σ_n^2 的高斯白噪声. 根据贝叶斯估计可以由含噪声的图像 y 对真实图像 x 作出估计:

$$\hat{x}(y) = \frac{\int x p_{x|y}(x|y) dx}{\int p_{y|x}(y|x) p_x(x) dx} = \frac{\int x p_n(y-x) p_x(x) dx}{\int p_n(y-x) p_x(x) dx}$$

$$= \frac{\int x p_n(y-x) p_x(x) dx}{\int p_n(y-x) p_x(x) dx} \quad (2)$$

p_n 是噪声的概率密度函数, p_x 是图像的先验概率密度函数. 如果事先知道 p_x , 则 x 可以估计出来.

图像的小波系数表现出很强的非高斯统计特性, 其直方图可以用推广的拉普拉斯分布表示^[2,3]:

$$p_x(x) = e^{-|x|^{s/v}} / Z(s, v) \quad (3)$$

其中 $Z(s, v) = (2s/v) \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t^v} dt$ 为归一化常数, $(x) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t^v} dt$. 当 $v=1$ 和 $v=2$ 时, 分别是拉普拉斯分布和高斯分布.

图 1 是一图像的小波系数直方图及其估计模型.

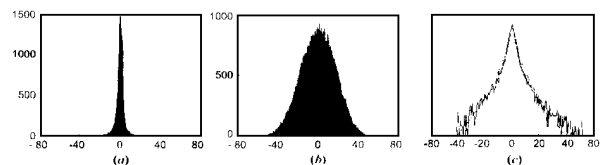


图 1 (a) Lena 图像的某一小波系数的直方图; (b) 高斯噪声直方图; (c) 半对数坐标系中的实际直方图 (实线) 与估计的值 (虚线).

参数 (s, v) 与图像的方差和峰态系数 (4 阶矩除以方差的平方) 存在关系:

$$\sigma^2 = \frac{\int x^2 p_x(x) dx}{\int p_x(x) dx} = \frac{\int x^2 e^{-|x|^{s/v}} dx}{\int e^{-|x|^{s/v}} dx} = \frac{\int_0^\infty x^2 e^{-x^{s/v}} dx}{\int_0^\infty e^{-x^{s/v}} dx} = \frac{\frac{2}{s} \Gamma(\frac{3}{v})}{2 \Gamma(\frac{1}{v})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{v})}{\Gamma(\frac{1}{v})} \quad (4)$$

σ_y^2 为图像 x 的方差, 是其峰态系数. 给定样本方差和峰态系数, 可以求出模型的两个参数. 当 σ_y^2 和 σ_x^2 未知时, 参数 $\{s, v\}$ 可通过噪声图像的 2 阶矩和 4 阶矩估计

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{s^2}{v} \left(\frac{3}{v} \right), m_4 = 3 \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{6 \frac{\sigma_x^2}{n} s^2}{v} \left(\frac{3}{v} \right) + \frac{s^2}{v} \left(\frac{5}{v} \right) \quad (5)$$

σ_y^2, m_4 分别为噪声图像的 2 阶矩和 4 阶矩.

3 滤波算法

典型的基于小波变换的噪声消除方法的处理过程为:

对图像进行小波分解;

对小波系数进行修正;

对修正后的系数进行小波重构, 得到消除噪声的图像.

通常在对小波系数进行修正时采用二值决策的方法, 根据噪声信号或干净信号选择其一修正: $w_i^* = x_i w_i$. w_i, w_i^* 分别为修正前、修正后的小波系数, x_i 为决策系数

$$x_i = \begin{cases} 0, & w_i \text{ 主要表现为噪声} \\ k, (0 < k \leq 1) & w_i \text{ 主要表现为信号} \end{cases}$$

降噪的性能取决于区分噪声与信号的准则. 门限方法便是采用二值决策方法修正小波系数.

基于贝叶斯估计的方法则是根据概率分布来确定小波系数的修正, 较二值决策的方法更为合理. 滤波的性能主要取决于先验模型的精确性.

图像的正交小波分解为:

$$\begin{cases} C_{j+1} = H_r H_c C_j \\ D_{j+1}^1 = H_r G_c C_j \\ D_{j+1}^2 = G_r H_c C_j \\ D_{j+1}^3 = G_r G_c C_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, J$$

小波系数 (细节图像) D_j^1, D_j^2, D_j^3 分别代表图像在尺度 j 下的横向、纵向和对角方向的边缘信息, 系数的幅值表明图像在该分辨率下灰度变化的剧烈程度.

对于受均值为 0, 方差为 $\frac{\sigma^2}{N}$ 的加性高斯白噪声干扰的图像

$$Y = X + N$$

其正交小波系数可表示为

$$D^j(Y) = D^j(X) + D^j(N) \quad (6)$$

其中 $D^j(N)$ 是均值为 0, 方差为 $\frac{\sigma^2}{N}$ 的加性高斯白噪声. $D^j(X)$ 的先验密度函数可以通过式 (3) ~ (5) 求出, 基于噪声观测的估计 $D^j(X|Y)$ 可由式 (2) 得到, 从而完成对小波系数的修正. 这样正交小波变换下的贝叶斯估计滤波算法归纳为:

- (1) 对噪声图像作小波变换;
- (2) 对噪声图像小波系数的密度函数建模;
- (3) 由贝叶斯估计估计出原始图像的小波系数;
- (4) 用估计出的小波系数重构, 便得滤波图像.

4 实验

原始图 (图 2(a)) 为 256×256 像素, 对其施加不同强度的白噪声, 分别采用门限方法和贝叶斯估计方法滤波. 由于滤波的性能与先验模型的精确性有很大的关系, 选择合适的小波

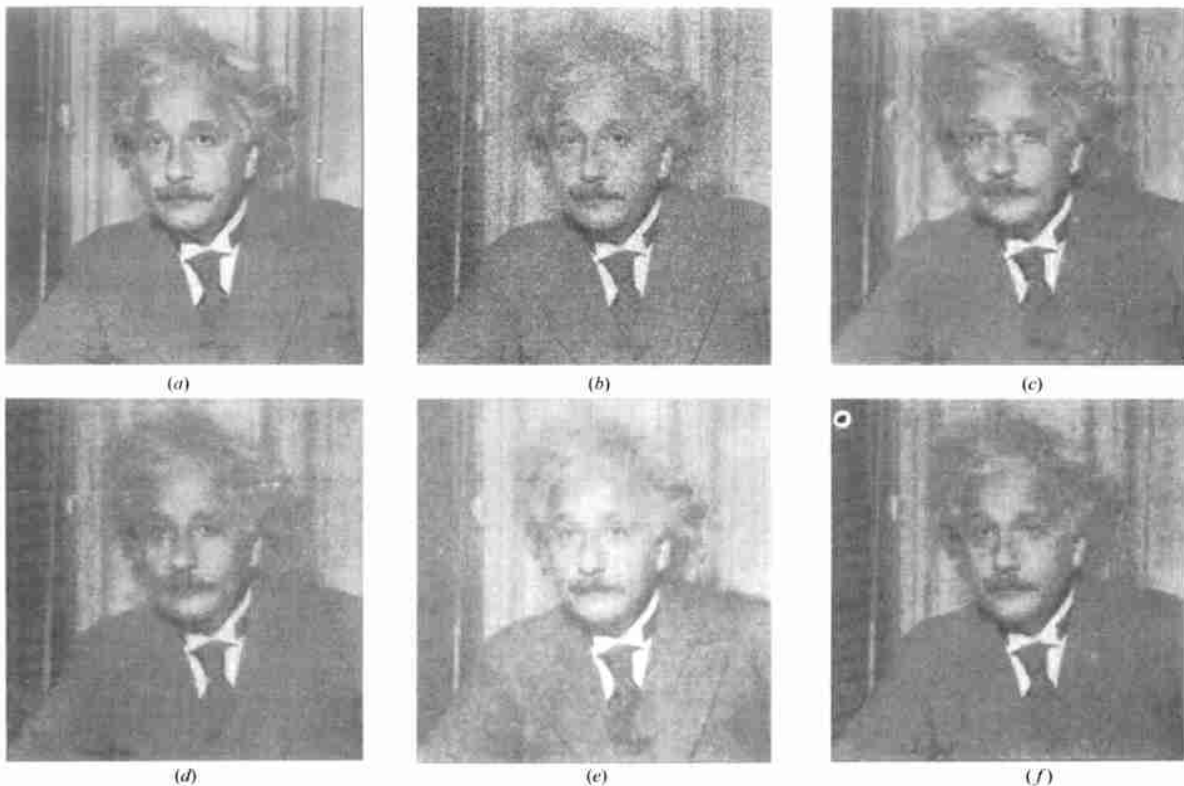


图 2 (a) 原始图像, (b) 噪声图像 (SNR = 4.78dB); (c) 软门限滤波 (SNR = 9.89dB); (d) 硬门限滤波 (SNR = 10.52dB); (e) 可控小波贝叶斯估计 (SNR = 11.67dB); (f) 正交小波贝叶斯估计 (SNR = 11.92dB).

基较为重要. 研究表明, Symlets 小波较 Daubechies 小波更为合适. 实验中选用 Symlets 10 拍小波, 5 层小波分解, 实验结果见表 1, 表中的数据为信噪比, 单位 dB. 图 2(c) ~ (f) 是信噪比为 4.78dB 时几种方法的滤波图像. 可以看出, 基于贝叶斯估计的信噪比高于门限方法, 并且没有很多的虚像.

表 1 几种方法的滤波结果

噪 声	门限滤波		贝叶斯估计	
	软门限	硬门限	可控小波	正交小波
4.78	9.89	10.52	11.67	11.92
9	12.43	12.94	13.82	14.17
13.98	15.15	15.75	16.40	17.25

表 2 正交小波的贝叶斯估计和可控小波的贝叶斯估计统计特性, 噪声图像信噪比为 4.78dB

	原 始 图	可控小波估计	正交小波估计
均 值	118.04	123.55	118.06
标 准 差	35.48	35.27	33.43
中 值	112	117	112.3

表 3 不同强度噪声污染图像的正交小波估计统计特性

	原 始 图	噪声强度(信噪比)		
		4.78	9.00	13.98
均 值	118.04	118.06	118.06	118.05
标 准 差	35.48	33.43	34.20	34.86
中 值	112	112.3	112.1	112.1

表 2 是信噪比为 4.78dB 时正交小波的贝叶斯估计和可控小波的贝叶斯估计与原始图的统计特性对比, 基于正交小波的贝叶斯估计信噪比高于可控小波的贝叶斯估计. 正交小波估计的均值和中值均和原始图接近, 而可控小波估计均高于原始图, 反映出用可控小波贝叶斯滤波的图像较原始图偏亮, 这主要是因为可控小波不具有正交特性. 但用正交小波估计图像的标准差则低于原始图, 这导致某些细节不够清晰, 这是因为正交小波变换不具有对称性和平移不变性, 重构的信号在跳变处被平滑. 表 3 是不同强度噪声污染图像用正交小波估计与原始图的统计特性对比.

5 结 论

图像的小波系数分布可以用推广的拉普拉斯先验分布建立先验模型, 根据贝叶斯估计用正交小波对图像进行多分辨率滤波抑制噪声, 有很好的效果. 但正交小波的估计在某些细节上表现不够清晰, 有待于进一步研究. 此外, 采用非抽样小波变换及混合模型建模^[6]有助于提高模型的精确性, 改善滤波性能.

参 考 文 献 :

- [1] Donoho D L. Denoising by Soft-thresholding [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, 41:613 - 627.
- [2] Mallat S A. Theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intell., 1989, 37:2091 - 2110.
- [3] Simoncelli E P, Adelson E H. Noise removal via Bayesian wavelet coding [A]. In Third Int'l Conf on Image Proc [C], 1996 volume I, 379 - 382.
- [4] Mallat M, Roose D. Wavelet-based image denoising using a markov random field a priori model [J]. IEEE Trans. Image Processing, 1997, 6(4):549 - 565.
- [5] Moulin P, Liu J. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized gaussian and complexity priors [J]. IEEE Trans. Information Theory, 1999, 45(3):909 - 919.
- [6] Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models [A]. IEEE Trans. Signal Proc. 1998, 46(4):886 - 902.

作 者 简 介 :



胡战虎 男, 1965 年 9 月生于广东省湛江市. 1988 年毕业于西北工业大学, 获学士学位, 1999 年毕业于西北工业大学, 获博士学位. 现为南京大学博士后. 主要研究方向为小波理论及应用、数据融合、数据库.